Tentamen Vectoranalyse
18 augustus 2004

Zet op elk vel je naam en student nummer. Gebruik voor elke som aparte vellen. De nummers tussen de haakjes geven het aantal punten aan voor die opgave.

$$\text{Cijfer} = 1 + \frac{\#}{3}$$

I) (5) Laat $D = \{(x,y)|\phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x), x \in [a,b]\}$ waarbij $\phi_1, \phi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ en

- $\phi_1(x) < \phi_2(x)$ voor alle $x \in (a,b)$,
- $\phi_1(a) = \phi_2(a)$,
- $\phi_1(b) = \phi_2(b)$.

Bewijs

$$\int_{\partial D} P dx = -\int\int_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy.$$

II) Laat $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeven zijn door

$$f(x,y,z) = x + y + z,$$

$$g(x,y,z) = z^2 - xy + \frac{3}{4}.$$

a) (4) Bepaal alle kandidaten voor extremen van f onder de conditie $g = 0$.

b) (4) Gebruik de Hessianen van f en g om het type van deze kandidaten te bepalen.

III) Laat $V = \{(x,y,z)|x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \text{ en } x^2 + y^2 \geq \frac{1}{4}\}$

a) (4) Bereken het volume van V.

b) (4) Bereken het oppervlak van de rand van V.

IV) Gegeven is het vectorveld

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (ye^{x^2}, ze^{-x^2}, z).$$

a) (3) Laat C_ϵ de lus zijn in het $xy-$vlak bestaand uit rechte lijnstukken van $(0,0,0)$ naar $(\epsilon,0,0)$, daarna naar $(\epsilon,\epsilon,0))$ en dan naar $(0,\epsilon,0)$ en terug naar $(0,0,0)$.

Bepaal

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon^2} \int_{C_\epsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

b) (3) Laat Ω_δ de bol zijn met middelpunt $(0,0,0)$ en straal δ. De rand van deze bol heeft de naam $\partial\Omega_\delta$.

Bepaal

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta^3} \int\int_{\partial\Omega_\delta} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$